РАЗДЕЛ I
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ ДАВЛЕНИЕМ

УДК 531.8+669.14

Алюшин Ю. А.

КИНЕМАТИЧЕСКИ ВОЗМОЖНЫЕ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ПЕРЕМЕННЫХ ЛАГРАНЖА

При разработке новых технологии и оборудования для обработки давлением следует учитывать достижения, в частности, теории пластичности и развиваемых на её основе различных методов исследования операций. В задачи теоретического исследования входит, как правило, анализ напряженно – деформированного состояния с определением мощности для расчёта усилий, если предполагается штамповка на прессе, или энергии для ковки на молоте. Для учёта упрочнения деформируемого материала необходимо знать усреднённые по объёму характеристики деформированного состояния, а для оценки предельных степеней деформации – локальные критерии пластичности [1–2].

Точность решения любой задачи механики зависит от принятых исходных предпосылок. Как правило, это дифференциальные уравнения в частных производных, решение которых зависит от начальных и граничных условий. Наибольшую погрешность обычно имеют граничные условия для напряжений, как нормальных, так и касательных с соотношениями Кулона или Мизеса [1]. С достаточно высокой точностью могут быть заданы только непосредственно наблюдаемые и измеряемые условия в перемещениях.

Цель работы – сокращение математических трудностей и повышение точности решения осесимметричных задач за счёт перехода к описанию движения в форме Лагранжа:

$$x_i = x_i(\alpha_p, t), \tag{1}$$

где t – время, $x_i \in (x, y, z)$, $\alpha_p \in (\alpha, \beta, \gamma)$ – переменные Эйлера и Лагранжа, соответственно.

С учётом более достоверной информации на границах заготовки и инструмента для скоростей и перемещений, особенно для нормальных компонент, широкое распространение получили методы, основанные на анализе кинематически возможных полей скоростей, в том числе из «жестких» блоков в методе верхней оценки [1]. Погрешность результатов зависит от степени соответствия действительных и принятых полей скоростей (перемещений) и увеличивается при повышении сложности геометрических особенностей очага деформации. Для нестационарных процессов она также возрастает за счёт необходимости интегрирования по времени скоростей деформации для фиксированных частиц при определении «накопленной» деформации, например, по критерию Одквиста [2].

Опыт исследования процессов деформации с применением кинематически возможных полей скоростей в пространстве переменных Эйлера [1–3] дает основания для его распространения на описание траекторий в форме Лагранжа. Набор таких полей скоростей для простейших процессов и принцип суперпозиции движений [4–5] позволяют использовать известные решения для анализа более сложных процессов деформации [6–7].

К преимуществам переменных Лагранжа можно отнести наглядность с возможностью визуального сравнения наблюдаемых и рассчитываемых траекторий перемещения узлов координатной сетки. Последние могут быть скорректированы дополнительным наложением простейших операций из числа упомянутых выше. В работах [6–7] рассмотрена методика перехода от кинематически возможных полей скоростей в пространстве переменных Эйлера к уравнениям движения в форме Лагранжа для процессов плоской деформации. Ниже она распространена на процессы осесимметричной деформации, из которых, как частные случаи, могут быть получены уравнения и для плоской деформации.

Как показывает анализ картин течения даже самых сложных поковок, любой выделенный в исходном состоянии элементарный объем в виде кольца с прямоугольным поперечным сечением в конечном итоге преобразуется в блоки, ограниченные коническими или близкими к ним поверхностями. Такие преобразования формы могут быть получены последовательными или одновременными наложениями процессов раздачи, осадки и сдвига. Для этих процессов ниже приведены уравнения движения в форме Лагранжа, компоненты скорости в переменных Лагранжа и Эйлера, а также основные инварианты деформированного состояния, в том числе энергетическая мера деформации [4]:

$$\Gamma_e^2 = (\partial\rho/\partial\rho_0)^2 + (\rho/\rho_0)^2 + (\partial z/\partial\rho_0)^2 + (\partial\rho/\partial z_0)^2 + (\partial z/\partial z_0)^2 . \tag{2}$$

Для проверки условия постоянства объёма использованы равенство потоков вектора скорости на границах очага деформации, дивергенция вектора скорости (с компонентами u, w) и отношение объёмов частицы в текущем (δV) и исходном (δV_0) состояниях (якобиан R):

$$div\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{u}{\rho} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \qquad R = \frac{\delta V}{\delta V_0} = \frac{\rho}{\rho_0}\begin{bmatrix} \partial\rho/\partial\rho_0 & \partial\rho/\partial z_0 \\ \partial z/\partial\rho_0 & \partial z/\partial z_0 \end{bmatrix} = 1. \tag{3}$$

Алгоритм расчёта мощности деформации с учёт упрочнения материала приведен в заключительной части статьи.

1. Однородная осадка

Предположение об однородной деформации чаще других используют при построении кинематически возможных полей скоростей [1–4]. Для осадки между параллельными плитами общепринятым соотношениям для компонент скорости в форме Эйлера:

$$u \equiv \rho_t = v_0\rho/(2h), \qquad w \equiv z_t = -v_0 z/h, \tag{1.1}$$

где $v_0 = -dh/dt \equiv -h_t$ – скорость перемещения верхней плиты, соответствуют уравнения движения в форме Лагранжа ($0 \le \rho_0 \le R_0$, $0 \le z_0 \le h$, h – высота заготовки),

$$\rho = \rho_0\sqrt{h_0/h}, \qquad z = z_0 h/h_0 . \tag{1.2}$$

Дифференцируя соотношения (1.2), получаем компоненты скорости:

$$u \equiv \rho_t = v_0\frac{\rho_0}{2h}\sqrt{\frac{h_0}{h}} = v_0\frac{\rho}{2h}, \qquad w \equiv z_t = -v_0\frac{z_0}{h_0} = -v_0\frac{z}{h}. \tag{1.3}$$

На поверхности контакта $z_0 = h_0$ или $z = h$ граничное условие $(z_t)\big|_{z=h} = h_t = -v_0$ выполняется.

Для перехода от переменных Лагранжа к переменным Эйлера достаточно заменить начальные координаты ρ_0 и z_0 на текущие ρ, z с помощью соотношений типа (1.2).

Интенсивность скорости деформации сдвига [4] по всему объёму одинакова:

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\xi_1-\xi_2)^2 + (\xi_2-\xi_3)^2 + (\xi_3-\xi_1)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{9v_0^2}{4h^2} + \frac{9v_0^2}{4h^2}} = \sqrt{3}\frac{v_0}{h}. \tag{1.4}$$

Компоненты вектора перемещения:

$$\upsilon_\rho = \rho - \rho_0 = \rho_0(\sqrt{h_0/h} - 1) = \rho(1 - \sqrt{h/h_0}), \qquad \upsilon_z = z - z_0 = z_0(h/h_0 - 1) = z(1 - h_0/h) \tag{1.5}$$

определяют интенсивность деформации сдвига γ_e:

$$\gamma_e = \sqrt{2/3}\sqrt{(\varepsilon_\rho - \varepsilon_\varphi)^2 + (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_\rho)^2 + (3/2)\gamma_{\rho z}^2} = 2/\sqrt{3}\left(h_0/h - \sqrt{h/h_0}\right), \qquad (1.6)$$

параметр упрочнения Одквиста Λ, энергетическую меру Γ_e^2 и среднеквадратическое отклонение длин рёбер бесконечно малой частицы в форме прямоугольного параллелепипеда от их среднего значения (Γ) [4]:

$$\Lambda = \int H dt = \sqrt{3}\int_h^{h_0} h^{-1} dh = \sqrt{3}\ln\frac{h_0}{h}, \quad \Gamma_e^2 = 2\frac{h_0}{h} + \frac{h^2}{h_0^2}, \qquad \Gamma^2 \approx 2\frac{h_0}{h} + \frac{h^2}{h_0^2} - 3 .$$

Разница в значениях Λ и $\sqrt{\Gamma_e^2 - 3}$ не превышает 5,45% вплоть до осадки на 25 %. С другой стороны, учитывая $e \approx 1$, $\Gamma^2 = \Gamma_e^2 - 3e^2 \approx \Gamma_e^2 - 3$, параметр Одквиста можно считать характеризующим среднеквадратическое отклонение длин рёбер бесконечно малого параллелепипеда от их среднего значения [4]. Это может служить основой для новой интерпретации геометрического и энергетического смысла параметра Λ.

2. *Однородный сдвиг*

Однородным сдвигом при осесимметричной деформации кольцевой заготовки в данной работе, по аналогии с однородным сдвигом при плоской деформации, названы два процесса. В первом движение частиц описывают уравнения (θ – угол сдвига в меридиональной плоскости от оси ρ):

$$\rho = \rho_0, \qquad z = z_0 + \theta\rho_0 \qquad (2.1)$$

с областью определения переменных Лагранжа $0 \le \rho_0 \le R_0$, $0 \le z_0 \le h$. При осевой скорости на внешней боковой поверхности заготовки $v_0 = \theta_t R_0$ для произвольной частицы получаем:

$$u = \rho_t = 0, \qquad w = z_t = \theta_t\rho_0 = v_0\rho_0/R_0 = v_0\rho/R_0 . \qquad (2.2)$$

Условия постоянства объёма (3) выполняются, интенсивность скорости деформации сдвига зависит от осевой компоненты скорости и радиуса R_0:

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\xi_\rho - \xi_\varphi)^2 + (\xi_\varphi - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_\rho)^2 + (3/2)\xi_{\rho z}^2} = \frac{v_0}{R_0} . \qquad (2.3)$$

Если процесс монотонный (без наложения других деформаций), интенсивность деформации сдвига γ_e, параметр Одквиста Λ и среднеквадратическое отклонение Γ совпадают:

$$\gamma_e = \gamma_{\rho z} = \frac{\partial u_z}{\partial \rho} + \frac{\partial u_\rho}{\partial z} = \frac{\partial(\theta\rho)}{\partial\rho} = \theta, \qquad \Lambda = \int H dt = \int \frac{v_0}{R_0} dt = \int_0^\theta \theta_t dt = \theta ,$$

$$\Gamma_e^2 = 3 + \theta^2 , \qquad \Gamma^2 = \Gamma_e^2 - 3 = \theta^2, \qquad \Gamma = \sqrt{\Gamma_e^2 - 3} = \gamma_e = \Lambda = \theta . \qquad (2.4)$$

Во втором варианте сдвиг определяют отклонения сечений $\rho = const$ от вертикали (оси z), движение частиц описывают уравнения:

$$\rho^2 = \rho_0^2 + r^2 - r_0^2, \qquad z = z_0 \qquad (2.5)$$

с областью определения переменных Лагранжа $r_0 \le \rho_0 \le R_0$, $z_m \le z_0 \le z_m + h$, где z_m – осевая координата нижней плоскости рассматриваемого кольцевого элемента.

Наклон линий $\rho = const$ в меридиональной плоскости определяет изменение радиальной компоненты скорости на внутренней поверхности, например, в виде линейной функции *z*:

$$u = u_1 + (u_2 - u_1)(z - z_m)/h .$$

Скорость изменения угла сдвига при линейной зависимости *u(z)* составляет $\vartheta_t = (u_2 - u_1)/h$, для произвольной частицы внутри рассматриваемой области получаем:

$$u(\rho_0, z_0, t) = \rho_t = r[u_1 + \vartheta_t(z_0 - z_m)]/\sqrt{\rho_0^2 + r^2 - r_0^2}\,, \qquad w = z_t = 0 .$$

Если принять, как в первом варианте, частицу с координатами $\rho_0 = r_0$, $z_0 = z_m = 0$ неподвижной, тогда:

$$u(\rho_0, z_0, t) = \rho_t = u_k r/\rho = \vartheta_t z_0 r/\rho = \vartheta_t z_0 r/\sqrt{\rho_0^2 + r^2 - r_0^2} .$$

На внутреннем контуре $u_k(r_0, z_0, t) = r_t = u_2 z_0 / h = \vartheta_t z_0$.

Наложение двух вариантов сдвига (2.1) и (2.5) при одновременном или последовательном протекании этих процессов описывают уравнения движения в форме Лагранжа :

$$\rho^2 = \rho_0^2 + r^2 - r_0^2, \qquad z = z_0 + \theta\rho_0,$$

которые позволяют определить все другие характеристики процесса.

3. *Раздача (обжим) кольцевой заготовки при неизменной толщине*

Процессы соответствуют затеканию металла в щель постоянной высоты. Предполагается, что перемещения частиц по всему объёму заготовки описывают уравнения:

$$\rho^2 = \rho_0^2 + f(t), \qquad z = z_0, \tag{3.1}$$

где $f(t) = V_{см}/(\pi h)$ – мера смещённого металла. Например, у кольца с отношением внешнего (R_0) и внутреннего (r_0) радиусов в исходном состоянии $R_0 / r_0 = 2$ после увеличения внутреннего радиуса до $r = 1{,}5 r_0$ внешний примет значение $R = 2{,}29 r_0$, при этом объём заготовки сохраняется неизменным $\pi h(R^2 - r^2) = \pi h(R_0^2 - r_0^2) = 3\pi h r_0^2$, мера смещённого металла составит $f(t) = R^2 - R_0^2 = r^2 - r_0^2 = 3r_0^2$.

Если известна радиальная компонента скорости на внутреннем контуре $u_0 = r_t$, где *r* – текущее значение радиуса внутреннего контура, тогда, принимая уравнения движения (3.1) в форме:

$$\rho^2 - \rho_0^2 = r^2 - r_0^2,$$

после дифференцирования по времени ($2\rho\rho_t = 2rr_t$) находим уравнение для радиальной компоненты скорости произвольной частицы:

$$u \equiv \rho_t = (r/\rho) r_t = u_0 (r/\rho).$$

Осевая компонента скорости, в соответствии с предположением о неизменности толщины, по всему объёму заготовки равна 0 ($w \equiv z_t = 0$). Интенсивность скорости деформации сдвига зависит от текущего радиуса частицы и скорости внутреннего контура:

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{4\frac{u_0^2 r^2}{\rho^4} + \frac{u_0^2 r^2}{\rho^4} + \frac{u_0^2 r^2}{\rho^4}} = 2\frac{u_0 r}{\rho^2} .$$

Параметр Одквиста определяют смещённый объём и начальное положение частицы:

$$\Lambda = \int H dt = \int 2\frac{u_0 r}{\rho^2}dt = \int_{r_0}^{r} 2\frac{r}{\rho^2}dr = \int_{r_0}^{r}\frac{dr^2}{r^2+\rho_0^2-r_0^2} = \ln\left(\frac{r^2+\rho_0^2-r_0^2}{\rho_0^2}\right) = \ln\left(1+\frac{r^2-r_0^2}{\rho_0^2}\right).$$

Переходя к перемещениям:

$$\upsilon_\rho = \rho-\rho_0 = \sqrt{\rho_0^2+f(t)}-\rho_0 = \rho-\sqrt{\rho^2-f(t)}\,, \quad f(t) = r^2-r_0^2\,,$$

для интенсивности деформации сдвига и меры деформации (2) получим:

$$\gamma_e = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(\rho/\rho_0)^2+(\rho_0/\rho)^2-\rho_0/\rho-\rho/\rho_0}\,,$$

$$\Gamma_e^2 = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2+\left(1+\frac{f(t)}{\rho_0^2}\right)+1 = \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2+f(t)}+\frac{\rho_0^2+f(t)}{\rho_0^2}+1\,.$$

Так как выше использовано только предположение (3.1), все вышеизложенное можно распространить на обжим (затекание металла в центральную полость постоянной толщины).

4. Центральная зона при обратном выдавливании с произвольной формой пуансона

Для большинства реальных процессов штамповки и выдавливания описать процесс деформации в виде одной зоны с достаточно простым полем скоростей, примеры которых рассмотрены выше, не представляется возможным и возникает необходимость анализа двух и более зон с отличающимися полями скоростей и перемещений. При этом особую роль играют зоны, непосредственно прилегающие к пуансону. Несмотря на их многообразие, в этой зоне можно воспользоваться достаточно простым полем скоростей, которое удовлетворяет не только условию постоянства объёма, но и граничному условию равенства нормальных компонент скорости на поверхности пуансона.

Рассмотрим процесс осесимметричной штамповки с произвольной формой пуансона $f(\rho)$ с производной $\partial f/\partial\rho = f'(\rho)$, положение которого в любой момент времени в системе координат $\rho - z$ описывает уравнение:

$$\psi = \psi(\rho,t) = h(t)+f(\rho)\,, \tag{4.1}$$

где $h(t)$ – расстояние от неподвижной плоскости $z = 0$ до поверхности пуансона на оси z. В зоне пуансона должно выполняться условие $w = -v_0$ при $z \ge \psi$.

Предполагая зависимость радиальной компоненты скорости только от одной координаты $u = u(\rho)$, из условия равенства потоков вектора скорости при любом виде функции $u = u(\rho)$ получаем:

$$2\pi\rho\psi u = v_0\pi\rho^2\,, \qquad u = 0{,}5 v_0\rho/\psi\,. \tag{4.2}$$

С учётом $v_0 dt = -d\psi$ и граничного условия $w = 0$ при $z = 0$ из условия постоянства объёма (3) получаем:

$$\frac{\partial w}{\partial z} == -\frac{v_0}{\psi}\left(1-\frac{\rho}{2\psi}f'\right), \qquad w = -v_0\frac{z}{\psi}\left(1-\frac{\rho}{2\psi}f'\right). \tag{4.3}$$

Чтобы поле скоростей было кинематически возможным, необходимо дополнительно выполнение граничного условия в виде равенства нормальных компонент скоростей на поверхности пуансона. Проектируя компоненты w и u на нормаль к поверхности пуансона с углом наклона $tg\theta = \partial f/\partial\rho$, получим:

$$v_n = u_k \sin\theta - w_k \cos\theta = v_0 \cos\theta \qquad \text{или} \qquad w_k = -v_0 + u_k f' . \tag{4.4}$$

На поверхности контакта заготовки и инструмента при $z = h$ осевая компонента скорости составит:

$$w_k = -v_0 \left(1 - \rho f'/(2\psi)\right) = -v_0 + u_k f' . \tag{4.5}$$

Таким образом, предположение о независимости радиальной компоненты скорости от осевой координаты обеспечивает выполнение всех условий, поле скоростей с компонентами (4.2) и (4.3) является кинематически возможным. Чтобы преобразовать уравнения движения (4.2) и (4.3) к форме Лагранжа, запишем уравнение (4.2) в виде:

$$\frac{d\rho}{dt} = v_0 \frac{\rho}{2\psi(\rho,t)} \qquad \text{или} \qquad \frac{d\psi}{d\rho} + \frac{2\psi(\rho,t)}{\rho} = 0 . \tag{4.6}$$

Например, для конического пуансона с уравнением $\psi = h + k\rho$ уравнение (4.6) принимает вид:

$$dh/d\rho + 2h/\rho + 2k = 0 . \tag{4.7}$$

Линейное уравнение первого порядка (4.7) имеет решение [8]:

$$h\rho^2 + (2/3)k\rho^3 = h_0\rho_0^2 + (2/3)k\rho_0^3 , \tag{4.8}$$

в справедливости которого можно убедиться непосредственной проверкой через обратные операции дифференцирования.

Для осевой координаты уравнение (4.3) преобразуем к виду:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dh}{h + k\rho}\left(1 - \frac{\rho k}{2(h + k\rho)}\right). \tag{4.9}$$

Здесь от времени зависят $z,\ h,\ \rho$. Для преодоления трудностей интегрирования можно принять ρ константой как среднее значение на рассматриваемом интервале времени:

$$z = z_0 \frac{h + k\tilde{\rho}}{h_0 + k\rho_0} \exp\left(\frac{k}{2}\left(\frac{\tilde{\rho}}{h + k\tilde{\rho}} - \frac{\rho_0}{h_0 + k\rho_0}\right)\right), \qquad \tilde{\rho} = \left(\rho\big|_{h_0} + \rho\big|_{h}\right)/2 . \tag{4.10}$$

Погрешность расчёта координаты z при таком предположении и уменьшении h_0 на 50 % составляет менее 3 %. При $k = 0$ решение преобразуется к полученному выше для осадки цилиндрической заготовки между параллельными плитами.

Для сферического пуансона:

$$\psi = h + R - \sqrt{R^2 - \rho^2} , \qquad d\psi = dh , \qquad d\psi/d\rho + 2\psi(\rho)/\rho = 0$$

решением дифференциального уравнения (4.6) будет:

$$\rho^2(h + R) + (2/3)(R^2 - \rho^2)^{3/2} = \rho_0^2(h_0 + R) + (2/3)(R^2 - \rho_0^2)^{3/2} . \tag{4.11}$$

Для осевой координаты из общего (4.3) и $\psi' = \partial\psi/\partial\rho = \rho/\sqrt{R^2 - \rho^2}$ окончательно получаем:

$$z = z_0 \frac{h}{h_0} \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\rho^2}{h\sqrt{R^2 - \rho^2}} - \frac{\rho_0^2}{h_0\sqrt{R^2 - \rho_0^2}}\right)\right). \tag{4.12}$$

Если сфера преобразуется в плиту ($R = \infty$), решение совпадает с (1.2) для осадки цилиндра.

5. *Процессы деформации с зонами разной высотной деформации*

Если в реальном процессе, например, при обратном выдавливании, гипотеза о параллельности перемещений границ кольцевой области неприемлема, тогда зону деформации можно разделить на несколько смежных зон, для каждой из которых предусматривается изменение высоты за счёт дополнительного наложения процесса осадки (с любым знаком осевой скорости на поверхностях зон).

Предположим, что кольцевой элемент с цилиндрическими внутренним и внешним контурами в исходном состоянии ограничен областью $0 \le z \le h_0$, причём нижняя плоскость остаётся неподвижной. Для каждой зоны с внутренним радиусом r_A и внешним r_B должно выполняться условие постоянства объёма, в том числе через равенство потоков вектора скорости на их границах:

$$u_A 2\pi r_A h = u_B 2\pi r_B h + w_1 \pi (r_B^2 - r_A^2) . \qquad (5.1)$$

В каждой зоне принимаем линейное изменение скорости по оси z и, следовательно:

$$z = z_0 h / h_0 , \quad z_t = z_0 h_t / h_0 , \quad w = v_1 z / h . \qquad (5.2)$$

Для радиальной координаты уравнение движения ищем из условия постоянства объёма в виде равенства потоков вектора скорости на подвижных поверхностях кольцевого элемента:

$$\rho^2 = r_A^2 + (\rho_0^2 - r_{A0}^2) h_0 / h \quad \text{или} \quad \rho^2 = r_B^2 - (r_{B0}^2 - \rho_0^2) h_0 / h \qquad (5.3)$$

при обязательном выполнении условия:

$$\pi (r_B^2 - r_A^2) h = \pi (r_{B0}^2 - r_{A0}^2) h_0 .$$

Особо отметим принципиальное отличие выделяемых кольцевых зон в пространствах переменных Эйлера и Лагранжа. В первом случае частицы деформируемого материала переходит из одной зоны в другую, пересекая границы, и в разных зонах следует использовать различные формулы для расчёта скоростей и других характеристик деформированного состояния. Кроме того, на границах зон частицы испытывают дополнительную деформацию сдвига (за счёт разницы касательных составляющих скорости). Во втором случае лагранжевы границы зон перемещаются вместе с частицами, они не могут их пересечь, расчётные формулы внутри зон сохраняются неизменными и могут изменяться лишь на разных интервалах времени, если предусматривается изменение, например, высотной деформации.

Анализ реальных процессов сводится к суперпозиции (наложению) рассмотренных выше простых видов деформации путём замены лагранжевых координат внешнего (переносного) движения выражениями для соответствующих эйлеровых координат внутреннего (относительного) движения [5]. Так как в процессах деформации перемещения внутреннего и внешнего движений малы, любой из процессов может быть принят внешним, а другой – внутренним. Например, при суперпозиции осадки (1.2) и раздачи (3.1) в обоих вариантах выбора внешнего и внутреннего движений получаем одинаковые уравнения:

$$\rho^2 = \rho_0^2 \frac{h_0}{h} , \qquad z = z_0 h / h_0 , \qquad R = \frac{\rho}{\rho_0} \begin{bmatrix} (\rho_0 h_0)/(\rho h) & 0 \\ 0 & h / h_0 \end{bmatrix} = 1 .$$

Аналогичная ситуация имеет место и при суперпозиции сдвига (2.1) и раздачи (3.1):

$$\rho^2 = \rho_0^2 + f(T) , \qquad z = z_0 + \theta \rho_0 , \qquad R = \frac{\rho}{\rho_0} \begin{bmatrix} \rho_0 / \rho & 0 \\ \theta & 1 \end{bmatrix} = 1 .$$

Количество наложений не ограничивается и может изменяться во времени с учётом особенностей рассматриваемого реального процесса деформации.

Мощность деформации для любого из рассмотренных процессов или их суперпозиции целесообразно определять с учётом накопленной (суммарной, интегральной по времени), деформации и соответствующих значений пределов текучести (линейного или степенного упрочнения).

$$W = \int TH\delta V + \sum k v_{ij} \delta f_{ij} + \sum 2\mu k v_{ik} \delta f_{ik} \ .$$

Первое слагаемое учитывает мощность деформации внутри каждой зона, второе – на границах смежных зон, третье – на контактной поверхности с инструментом.

ВЫВОДЫ

Предлагаемые варианты уравнений движения в форме Лагранжа для простейших процессов осесимметричной деформации (осадка, сдвиг, обжим и раздача, центральная зона деформации при обратном выдавливании, кольцевые зоны с разной осевой деформацией) соответствуют кинематически возможным полям скоростей, удовлетворяют граничным условиям, а также условиям постоянства объёма в дифференциальной и интегральной (по равенству потоков вектора скорости на границах очага деформации) формах. На частных примерах показана возможность их суперпозиции для исследования реальных процессов с возможностью корректировки решений на основе визуального сравнения экспериментально наблюдаемых и рассчитанных траекторий частиц деформируемого материала с учётом особенностей очага деформации. Дифференцирование уравнений движения по времени и переменным Лагранжа позволяет определять любые локальные и среднеинтегральные характеристики деформированного состояния, мощность и усилия деформации с учётом упрочнения материала.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Теория ковки и штамповки : учеб. пособие / Е. П. Унксов, У. Джонсон, В. Л. Колмогоров и др. – М. : Машиностроение, 1992. – 720 с., ил.*
2. *Колмогоров В. Л. Механика обработки металлов давлением / В. Л. Колмогоров. – М. : Металлургия, 1986. – 688 с.*
3. *Энергетическая модель обратимых и необратимых деформаций / Ю. А. Алюшин, С. А. Еленев, С. А. Кузнецов, Н. Ю. Кулик. – М. : Машиностроение, 1995. – 128 с., ил.*
4. *Алюшин Ю. А. Механика процессов деформации в пространстве переменных Лагранжа : учеб. пособие для вузов / Ю. А. Алюшин. – М. : Машиностроение, 1997. – 136 с.*
5. *Алюшин Ю. А. Принцип суперпозиции движений в пространстве переменных Лагранжа / Ю. А. Алюшин // Проблемы машиностроения и надёжности машин. – 2001. – № 3. – С. 13–19.*
6. *Алюшин Ю. А. Методы определения траекторий частиц в процессах деформации / Ю. А. Алюшин, Г. П. Жигулёв, А. М. Широких // Обработка материалов давлением : сб. науч. трудов. – Краматорск : ДГМА, 2012. – № 1 (26). – С. 9–16.*
7. *Кинематически возможные поля скоростей при поперечно – винтовой прокатке / Ю. А. Алюшин, А. В. Гончарук, Г. П. Жигулев, Р. Н. Фартушный // Обработка материалов давлением : сб. науч. трудов. – Краматорск : ДГМА, 2008. – № 1 (18). – С. 4–10.*
8. *Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1969. – 424 с.*

Алюшин Ю. А. – д-р техн. наук, проф. МГГУ.

МГГУ – Московский государственный горный университет, г. Москва, Россия.

E-mail: alyushin7@gmail.com

Статья поступила в редакцию 18.02.2013 г.